Revista de Comunicación Vivat Academia
ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21
Diciembre 2001 · Año IV · nº 31 · pp. 1-21

ECUACIONES EN DIFERENCIAS. PLANTEAMIENTO GENERAL

DIFFERENCE EQUATIONS. THE GENERAL APPROACH

Arturo Pérez París: Universidad de Alcalá. Madrid (España).
arturo.perez@mixmail.com

Julio Gutiérrez Muñoz: Universidad de Alcalá. Madrid (España).
julio.gutierrez@uah.com

CURRÍCULUM VITAE DE CADA AUTOR

Arturo Pérez París

Escuela Politécnica de la Universidad de Alcalá de Henares. Ingeniero electrónico y literato. Destacan sus estudios sobre aplicaciones eléctricas y motricidad sobre los que ha publicado varios artículos científicos.

Julio Gutiérrez Muñoz

Catedrático de Física Nuclear de la Universidad de Alcalá de Henares. Autor de numerosos artículos científicos. Miembro fundador de GRUA (Grupo de Reflexión de la Universidad de Alcalá de Henares). Vicerrector de la Universidad de Alcalá de Henares. Director de la Revista Vivat Academia.

RESUMEN

Las "Torres de Hanoi" hacen referencia a un rompecabezas a través del cual se describe, de forma sencilla, el método de la recurrencia. Las ecuaciones en diferencias nos describen la evolución temporal de un sistema o un fenómeno, de forma que los diferentes estados discretos, por los que pasa sucesivamente, son función directa de los correspondientes estados inmediatamente anteriores; estos son los llamados sistemas dinámicos discretos, es decir con evoluciones a saltos en el tiempo y no de forma continua, lo que vendría expresado por una ecuación diferencial. En este artículo llevamos a cabo un ejercicio de abstracción que nos permite estudiar un poco más a fondo las ecuaciones de este tipo. También ofrecemos una serie de pautas para poder manipular adecuadamente las ecuaciones lineales en diferencias y se han estudiado conceptos como los criterios de estabilidad y asintoticidad.

Espacio en blanco

PALABRAS CLAVE

Torres de Hanoi - Ecuaciones - Sistemas

ABSTRACT

The "Towers of Hanoi" refers to a puzzle through which is described, simply, the method of recurrence. The difference equations we describe the time evolution of a system or a phenomenon, so that different discrete states through which it passes on, are a direct function of the related statements immediately before and these are called discrete dynamical systems, ie with developments in leaps in time and not continuously, which would be expressed by a differential equation. In this article we conduct an exercise of abstraction that allows us to study a little further this tipo.También equations provide a set of guidelines to properly handle differences linear equations and studied concepts such as stability criteria and asymptotes.

KEY WORDS

Towers of Hanoi - Equations - Systems

ÍNDICE

TEXTO:

1. Introducción

En el número anterior de Vivat Academia, hacíamos una introducción al estudio de las ecuaciones en diferencias, mediante un bonito rompecabezas, denominado las "Torres de Hanoi", a través del cual se describe, de forma sencilla, el método de la recurrencia. Ello nos permitió encontrar el valor de un estado cualquiera de un sistema en función de su estado precedente, estableciendo la correspondiente ecuación. En las ciencias de la computación y sobre todo en lo referente a su aplicación sobre sistemas de control digital, así como en otras muchas áreas del saber, la aplicación de esta herramienta matemática nos permite la síntesis de programas que realicen una determinada tarea que sabemos con certeza como sería (o habría de ser), de forma empírica, mediante una secuencia de "n" elementos. En esta segunda parte haremos un ejercicio de abstracción, para estudiar un poco más a fondo las ecuaciones de este tipo.

En consecuencia, las Ecuaciones en Diferencias nos describen la evolución temporal de un sistema o un fenómeno, de forma que los diferentes estados discretos, por los que pasa sucesivamente, son función directa de los correspondientes estados

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

inmediatamente anteriores; estos son los llamados sistemas dinámicos discretos, es decir con evoluciones a saltos en el tiempo y no de forma continua, lo que vendría expresado por una ecuación diferencial. Así pues, si un sistema se encuentra en un estado n+1 (con n perteneciente al conjunto de los números enteros positivos: nÎ Z+, n = {0, 1, 2, 3..., a, a+1, a+2… }) la formulación general de este tipo de ecuaciones se expresará:

y[n+1] = f(y[n])

o, alternativamente, partiendo de un estado inicial para el sistema, y[0], podemos generar la secuencia

y[0], f(y[0]), f(f(y[0])), f(f(f(y[0]))),...

que habitualmente se escribe en la forma siguiente:

f0(y[0]) = y[0];
f(y[0]) = f1(y[0]);
f2 (y[0]) = f(f(y[0]));
f3(y[0]) = f(f (f(y[0])))...

o bien

y[n+1] = fn+1(y[0]) = f(y[n]) = f(fn(y[0]))

Para permitir al lector manejarse con la nomenclatura convencional en estos casos, diremos que

f(y[0]) es llamado primer iterante de y[0] en la función f f2 (y[0]) es llamado segundo iterante de y[0] en la función f

.

.

.

fn(y[0]) es llamado enésimo iterante de y[0] en la función f

El conjunto de todos los iterantes, que se representa normalmente por {fn(y[0]), nÎ Z+, o bien por O(y[0]), se denomina órbita de y[0].

Pongamos un ejemplo:

Sea y[0] = 256 y f(y[n]) = (y[n])1/2. La secuencia de iterantes se corresponde con:

256; 16; 4; 2; 1,41; 1,19; etc.

Como se puede apreciar fácilmente, esta secuencia tiende a la unidad, que sería entonces un punto atractor de la órbita, donde, además, permanecería el sistema indefinidamente. Es decir, podríamos considerarlo como un estado de equilibrio del sistema. En la resolución de esta especie de ecuaciones (obviamente no en el ejemplo precedente) nos encontraremos con comportamientos curiosos de este tipo: puntos atractores, a los que el sistema tiende asintóticamente; puntos de equilibrio, donde el sistema, una vez alcanzados, permanece, y que a su vez pueden ser estables o inestables; puntos periódicos entre los cuales el sistema oscila, tomando valores iguales alternativamente; y puntos de bifurcación, en los que el sistema puede tomar varios valores simultáneamente, encontrando vías diferentes de evolución. Al respecto de los puntos de bifurcación recomendamos la lectura del artículo introductorio mencionado, publicado en el número 30 de Vivat Academia, donde, en la resolución del problema de las "Torres de Hanoi", había situaciones en las que podíamos optar por un cambio de fase u otro que, en unos casos, nos llevaban a la

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

situación inicial y, en otros, podían hacer que el sistema diera con un estado en el que se hacía necesario desandar los pasos dados para llegar a la solución correcta.

2. Equilibrio

Es particularmente interesante estudiar los puntos de equilibrio. Llamamos punto o estado de equilibrio de una ecuación en diferencias a aquel estado y[n] que verifica:

y[n+1] = f(y[n]) = y[n]

es decir, el estado permanece invariante. Veámoslo mediante un ejemplo. Sea el valor del estado:

y[n] = x

y la función que determina la evolución del sistema:

y[n+1] = f(y[n]) = y[n]. y[n]. y[n] = y3[n] = x3

Esta ecuación representa un sistema con tres puntos de equilibrio, a saber:

x = 1, x = -1 y x = 0

Si el sistema llega alguna vez a tomar alguno de los tres anteriores valores, tras partir de una condición inicial (un valor de x) determinada, habrá alcanzado un punto de equilibrio.

Existe una diferencia fundamental entre este tipo de equilibrios, obtenidos mediante ecuaciones en diferencias y los obtenidos mediante una ecuación diferencial. Mientras en estas últimas los equilibrios son soluciones bien definidas de la ecuación, en los sistemas tratados en diferencias, una solución de la ecuación puede no representar un equilibrio de partida pero, tras un número finito de iteraciones, puede alcanzar un punto de equilibrio y, si es estable, permanecer en él y ello dependerá de las condiciones iniciales del problema, es decir del valor de y[0]. El ejemplo anterior no es muy ilustrativo al respecto, ya que x3 sólo puede alcanzar alguno de los tres valores si parte inicialmente de ellos. Pero se pueden encontrar sistemas que se comporten de tal manera que se alcance la estabilidad dependiendo de la condición inicial.

Ejemplo:

Sea el sistema descrito por la ecuación en diferencias

y[n+1] = f(y[n])

con

f(y[n]) = 2 y[n]

si y[n] toma valores en el intervalo cerrado [0, ½], (es decir, con inclusión de los valores correspondientes a los bordes)

f(y[n]) = 2 (1-y[n])

si y[n] toma valores en el intervalo abierto por la izquierda (1/2, 1], (es decir, con inclusión del valor del borde derecho y exclusión del correspondiente valor del borde izquierdo).

f(y[n]) = 3 y[n] –1

si y[n] toma valores mayores que la unidad.

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

Tomemos como condición inicial y[0] = 1/8. Siguiendo el proceso de iteración, encontramos

y[1] = ¼
y[2] = ½
y[3] = 1
y[4] = 0
y[5] = 0
y[6] = 0
y así indefinidamente

Es decir hemos alcanzado un punto de estabilidad en sólo cuatro iteraciones, donde el sistema permanecerá en el futuro, sin cambio alguno. El estado de equilibrio es 0. Se puede comprobar fácilmente que existe otro punto de equilibrio de valor 2/3.

Sin embargo, si tomamos como condición inicial y[0] = 5/9, el sistema crece en valor indefinidamente.

Las ecuaciones en diferencias proveen, en muchas áreas del conocimiento (Física, Biología, Economía, Ingeniería, etc.), la solución de problemas ligados a la estabilidad, asintoticidad de un comportamiento dinámico, oscilaciones, teoría del control, caos, fractales, etc. No obstante, nuestra intención es dar a conocer su comportamiento general, para resolver ecuaciones diferenciales por métodos prestados de estos procedimientos. Por consiguiente, no vamos a profundizar en el estudio de las Ecuaciones en Diferencias y nos limitaremos a dar una serie de pautas que nos serán útiles más adelante.

NOTA: Nótese que la ecuación sólo contiene una variable y[n] (en la nomenclatura del artículo anterior, un cambio de fase y[n]). Si la ecuación representara el valor del estado y[n] en función, no sólo de sus estados anteriores, sino también en función de los estados de otras variables o cambios de fase, x[n], z[n], etc., que, a su vez, dependen de sus correspondientes estados anteriores entre sí y de los de la variable y[n], denominaríamos al conjunto Sistema de Ecuaciones en Diferencias.

3. Ecuaciones Lineales y de Primer Orden en Diferencias

Una Ecuación en Diferencias, lineal de primer orden sería:

$y[n+1] = c(n)\, y[n] + b(n)$

Donde c(n) y b(n) son coeficientes, que varían, en principio, de un estado a otro, es decir, c(n+1) puede ser diferente de c(n) (análogamente con b(n)), en cuyo caso se denomina ecuación de coeficientes no constantes. Si c y b son constantes reales (c,b Î R) que mantienen su valor a lo largo de todo el proceso, la nomenclatura cambiaría a Ecuación Lineal en Diferencias, con Coeficientes Constantes. Además, esta ecuación recibe el sobrenombre de inhomogénea, por el hecho de poseer el término adicional b(n) que, si bien es independiente del cambio de fase y[n] en sí, es función del estado n, lo que hace cambiar considerablemente el resultado en cada iteración. La correspondiente ecuación homogénea se escribiría:

$y[n+1] = c(n)\, y[n]$

La ecuación se denomina lineal porque depende exclusivamente del valor del estado anterior y no de una función complicada de ese mismo estado anterior, o de una combinación de estados anteriores.

Como ejemplo de una ecuación inhomogénea en coeficientes variables tendríamos:

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

y[2] = c(1)y[1] + b(1)

y[3] = c(2)y[2] + b(2) = c(2)(c(1)y[1] + b(1)) + b(2) =
= c(2)c(1)y[1] + c(2)b(1)) + b(2)

y[4] = c(3)y[3] + b(3) = c(3)(c(2)y[2] + b(2)) + b(3) =
c(3)c(2)c(1)y[1] + c(3)c(2)b(1)) + c(3)b(2) + b(3)

y así sucesivamente. En este caso hemos partido de una condición inicial sobre el estado y[1].

Una muestra de lo que podría ser una Ecuación Lineal, Inhomogénea, en Diferencias con Coeficientes Constantes podría ser la siguiente:

3 y[n+1] -2 y[n] = 2

3, 2 y 1 Coeficientes constantes

y[n+1] Instante futuro de la ecuación

y[n] Instante presente de la ecuación

Una ecuación en diferencias con coeficientes no constantes podría ser:

3n y[n+1] -2 (n+1) ·y[n] = n + 2

3n, 2(n+1) y (n+2) Coeficientes (no constantes)

El dominio discreto es definido por los valores que tomará la función en puntos concretos y aislados dentro de una acotación de estos, es decir, dentro del intervalo de validez de los diferentes estados.

4. Orden o Grado de las Ecuaciones en Diferencias

Los ejemplos puestos hasta ahora lo son de ecuaciones de primer orden, o también de primer grado, porque cada estado depende del inmediato anterior. Si la ecuación describiera el valor de un estado n en función del valor de dos o más estados anteriores, pongamos por caso:

y[n+1] = f(y[n-4])
diríamos que es de un grado u orden mayor que la unidad. En el ejemplo anterior el grado sería 5, ya que un estado concreto es función directa de lo que aconteció cinco estados anteriores.

Pueden existir combinaciones de varios estados anteriores, como por ejemplo:

y[n] = f(y[n-4]) + g(y[n-3]) + h(y[n-1])

Llamaremos "designador de instante" al número entero que, restado del valor de n, indica cuántos estados anteriores hay que considerar en el correspondiente término de la ecuación. Así la expresión anterior podríamos escribirla:

y[n] = f(y[n-a1]) + g(y[n-a2]) + h(y[n-a3])

con valores a1=4, a2=3 y a3=1. Los coeficientes ai son los designadores de instante y han de pertenecer a los enteros positivos (ai Î Z+).

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

El grado u orden de la ecuación vendrá determinado por el mayor de los designadores de instantes (ai). La ecuación:

$$3\,y[n+1] - 2\,y[n] = n + 2$$

es de grado uno, (además de tratarse de una ecuación lineal no homogénea). Sin embargo, la siguiente:

$$3\,y[n+5] - 2\,y[n] = 0$$

consiste en una ecuación de quinto grado (que es además lineal y homogénea).

La resolución de estas ecuaciones necesita de tantos valores iniciales como grado tengan ya que, en principio, no están definidas todas las condiciones de partida de las mismas. Es decir, continuando con el mismo ejemplo anterior, si conocemos el valor de y[n], conoceremos el estado y[n+5], pero desconocemos los estados intermedios y[n+1], y[n+2], y[n+3] e y[n+4], y no podremos determinar directamente y[n+6], y[n+7], y[n+8], y[n+9] y sus correspondientes posteriores, salvo que demos explícitamente estos valores al comienzo.

Este tipo de ecuaciones lineales en diferencias de orden mayor que la unidad son clásicas en casi todos los ámbitos de la Ciencia. Así están presentes en el estudio de la dinámica de poblaciones de una sola especie (cuando se hacen intervenir varias especies, nos enfrentaríamos a la resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias), en la evolución de la economía, cuando se hace intervenir una sola variable, en el estudio del movimiento de un único cuerpo en física...

5. Elementos de cálculo de las diferencias

El cálculo correspondiente a las ecuaciones en diferencias es muy similar al correspondiente de las ecuaciones diferenciales e integrales y, en un próximo artículo discutiremos estas analogías que nos llevan a poder resolver las ecuaciones diferenciales, con métodos numéricos, haciendo uso de las técnicas de resolución de las ecuaciones que nos ocupan. Vamos, pues, a definir una serie de operadores que nos facilitarán los cálculos y nos serán muy útiles en el futuro. Estos operadores son: operador identidad, operador diferencia, operador desplazamiento, y operador antidiferencia.

Denominamos operador identidad (I) a aquella operación en el sistema que deja invariante (sin cambios) su estado, es decir:

I y[n] = y[n]

Su aplicación sucesiva será:

Ik y[n] = I y[n] = y[n]

Denominamos operador diferencia (D) al proceso que lleva a obtener la diferencia entre dos estados consecutivos, o lo que es lo mismo:

D y[n] = y[n+1] – y[n]

Este operador D también suele designarse por la letra griega D, denominada a su vez incremento.

Denominamos operador desplazamiento (E) (también llamado operador salto)a la operación que me lleva a obtener el estado futuro de un sistema a partir del estado precedente. Consecuentemente este operador coincide con la propia definición de

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

ecuación en diferencias cuando el grado de la ecuación es uno, mientras que será diferente si el grado de la ecuación es superior a la unidad:

E y[n] = y[n+1]

Obviamente, la aplicación sucesiva del operador desplazamiento hace posible el salto de un estado a otro alejado en el futuro, o en forma abreviada:

Ek y[n] = y[n+k]

Es inmediato encontrar que el operador diferencia es combinación de los operadores identidad y desplazamiento, siendo complicada la relación directa entre D y E:

D y[n] = (E – I) y[n] = y[n+1] – y[n]

Por lo tanto, su aplicación sucesiva se puede escribir como:

Dk y[n] = (E – I)k y[n]

Que, recordando el desarrollo de la potencia de un binomio:

(a – b)2 = a2 + b2 - 2. a . b

(a - b)3 = a3 - 3. a2 . b + 3. a . b2 - b3

$$(a-b)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} a^{(k-i)} . b^i$$

donde

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!.(k-i)!} =$$

$$= \frac{k.(k-1).(k-2).(k-3)\ldots 3.2.1}{i.(i-1).(i-2).(i-3)\ldots 3.2.1.(k-i).(k-i-1).(k-i-2)\ldots 3.2.1}$$

con el convenio: 0! = 1, equivale a:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}^k\, y[n] = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^k\, y[n] = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} \mathbf{E}^{(k-i)}\, \mathbf{I}^i\, y[n] = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} \mathbf{E}^{(k-i)}\, y[n] = \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} y[n + k - i]
\end{aligned}$$

Correspondientemente, se puede demostrar:

$$\mathbf{E}^k\, y[n] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathbf{D}^{(k-i)}\, y[n]$$

El operador diferencia D es el equivalente al operador derivada en el cálculo diferencial.

También son fáciles de demostrar las siguientes igualdades:

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{D}^{k}\, y(k) = y(n) - y(0)$$

$$\mathbf{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\right) = y(n)$$

Similarmente podemos definir una suma de potencias del operador desplazamiento E, en forma polinomial:

p(E) = a0 Ek + a1 E(k-1) + a2 E(k-2) + ... + a(k-1) E + ak I

Denominamos operador antidiferencia (D-1 ó D-1) a la operación consistente es deshacer la correspondiente al operador diferencia. Obviamente, en el contexto de las ecuaciones diferenciales ello equivale a realizar la integración. Su definición será:

D D-1 y[n] = y[n]

O bien:

D D-1 = I

Recordemos la definición del operador diferencia y de la propia ecuación en diferencias:

y[n+1] = f(y[n])

D y[n] = y[n+1] – y[n]

Por consiguiente:

D y[n+1] = y[n+2] – y[n+1] =
= D f(y[n]) = f(y[n+1]) - f(y[n])

Si añadimos una constante a la función que determina la ecuación:

y[n+1] = f(y[n]) + b

la operación D será:

D y[n] = y[n+1] – y[n] = f(y[n]) + b - f(y[n-1]) - b =
= f(y[n]) - f(y[n-1]) =
= D {f(y[n-1]) + b} = D {f(y[n-1])}

Es decir, añadir una constante al valor de un estado proporciona el mismo valor para la operación diferencia. Obviamente el operador antidiferencia en solitario no tiene por qué proporcionar exactamente el valor de la función que determina el salto de un estado a otro, sino ese valor salvo una constante, ya que la aplicación posterior del operador diferencia nos dará el mismo resultado. Llamemos F(y[n]) a la función tal que

D-1 f(y[n]) = F(y[n])

De la definición de antidiferencia:

D D-1 f(y[n]) = f(y[n]) = D F(y[n]) = D {F(y[n] + b}

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

O consecuentemente:

D-1 f(y[n]) = F(y[n]) + b

Donde b puede tomar el valor cero (0). En definitiva tenemos infinitos estados posibles, diferenciados mediante constantes, en la aplicación del operador antidiferencia. Consecuentemente:

D-1 D F(y[n]) = F(y[n]) + b

Mientras que:

D D-1 f(y[n]) = f(y[n])

En este caso se dice que los operadores D y D-1 no conmutan, puesto que su aplicación en orden diferente produce resultados distintos.

Por otra parte, como

$$\mathbf{D}\left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k)\right) = y(n)$$

se puede inferir con facilidad el resultado

$$\mathbf{D}^{-1}\, y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + b$$

6. Soluciones a las ecuaciones lineales

Si una ecuación es lineal de cualquier grado, sea homogénea o no, con coeficientes constantes o variables, es decir:

$$y[n+1] = \sum_{k=0}^{n} g_k \ (n)\, y[k]$$

siendo k un número entero, y admite más de una solución, la suma combinada (combinación lineal) de las soluciones es también solución de la ecuación. Efectivamente, sean y1[n] e y2[n] dos soluciones cualesquiera. La combinación:

y[n] = P y1[n] + Q y2[n]

con P y Q dos números reales indeterminados, también es solución. Escribamos la ecuación en la forma:

$$y[n+1] - \sum_{k=0}^{n} g_k \ (n)\, y[k] = 0$$

Como y1[n] e y2[n] son soluciones, ambas verifican:

$$y_1[n+1] - \sum_{k=0}^{n} g_k \ (n)\, y_1[k] = 0$$

$$y_2[n+1] - \sum_{k=0}^{n} g_k \ (n)\, y_2[k] = 0$$

Por lo tanto:

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21

$$P\left[y_1[n+1]-\sum_{k=0}^{n} g_k\ (n)\, y_1[k]\right]+Q\left[y_2[n+1]-\sum_{k=0}^{n} g_k\ (n)\, y_2[k]\right]=0$$

Ello nos resultará especialmente útil para encontrar las soluciones generales de nuestras ecuaciones: aquellas soluciones que nos permiten definir la evolución de un sistema para cualquier condición inicial.

Si tenemos un conjunto de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal, es decir, una combinación lineal arbitraria de ellas en la forma:

P1 y1[n] + P2 y2[n] + P3 y3[n] + ... + Pm ym[n]

que sólo puede anularse si se anulan cada uno de los coeficientes Pm, la combinación anterior es también solución no trivial de la ecuación. Si ese conjunto de soluciones es completo, es decir hemos encontrado todas las soluciones linealmente independientes posibles, esa combinación lineal nos proporciona la solución llamada general y podremos determinar el valor de y[n] para un valor cualquiera de y[0].
Volver al principio de Soluciones de las ecuaciones lineales

7. Conclusión:

Hemos dado en el presente artículo una serie de pautas para poder manipular adecuadamente las ecuaciones lineales en diferencias. También hemos estudiado, de forma somera, los criterios de estabilidad y asintoticidad.

Cualquier ecuación de este tipo puede resolverse por el método estándar de la recurrencia. En los casos más simples ello puede ser útil. Sin embargo, en la mayoría de los casos que nos encontraremos, debemos recurrir a otros métodos con el fin de asegurarnos la obtención de las soluciones sin recurrir a cálculos complejos y larguísimos.

Dejamos para próximas entregas la descripción de alguno de estos métodos de resolución, así como los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones. También haremos el paralelismo entre este tipo de ecuaciones y las ecuaciones diferenciales, para posteriormente indicar los métodos de resolución de estas últimas en consonancia con los obtenidos para las ecuaciones en diferencias. Nótese que las definiciones dadas para los operadores se asemejan extraordinariamente con los procesos de tratamiento de la diferenciación e integración de ecuaciones.

ISSN: 1575-2844 · DOI: http://dx.doi.org/10.15178/va.2001.31.1-21